

叠上的层

卜辰璟

University of Oxford

清华大学

2026 年 8 月 21 日

目录

1 叠

2 叠上的层

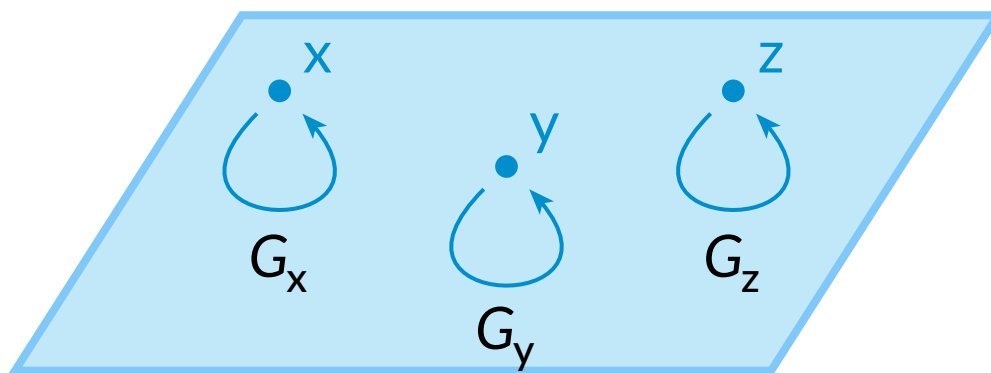
3 半正交分解

4 应用

叠

叠

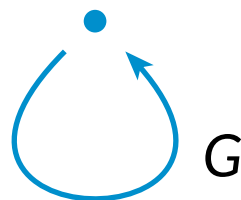
- 群胚为所有态射均可逆的范畴.
- 叠可大致定义为 Lie 群胚, 即对象、态射之集均为复流形的群胚.



- 叠就像复流形, 但每个点有一个自同构群.

例子

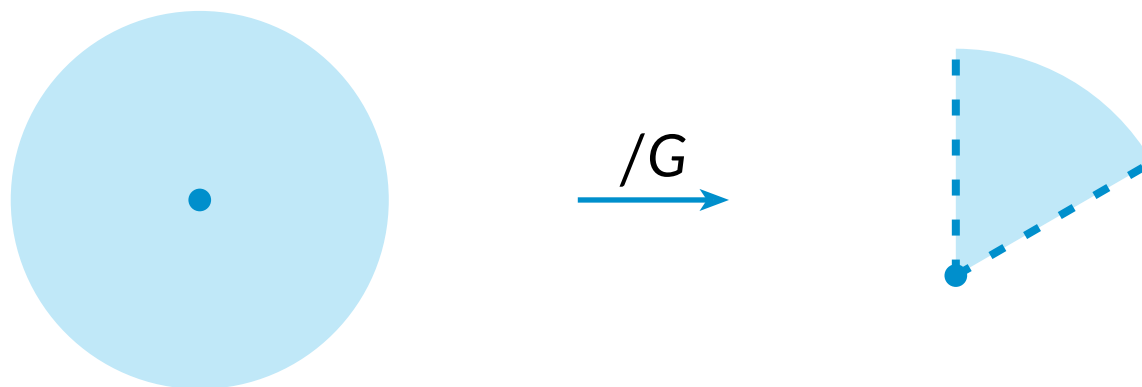
- 对 Lie 群 G , 有分类叠 $*/G$, 它只有一个点, 自同构群为 G .



- 若 Lie 群 G 作用于复流形 X , 则有商叠 X/G .
 - X/G 的点对应 X 中的 G -轨道.
 - X/G 中点的自同构群为稳定子 $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$.
 - 若群作用自由, 则稳定子平凡, 此时商叠是通常的商空间.

例子

让 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 以旋转 $2\pi/n$ 作用于 $\mathbb{C}$. 则商叠 $\mathbb{C}/G$ 是圆心角 $2\pi/n$ 的扇形, 原点的自同构群为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 其它点的自同构群平凡.



记住原点的自同构群是重要的, 就像范畴不能简单地视为集合.

例子

- 一类几何对象全体常常具有模叠. 例如:
 - 对复 Lie 群 G , 复代数簇 X 上的 G -主丛构成模叠

$$\mathrm{Bun}_G(X) = \mathrm{Map}(X, */G),$$

这里 $\mathrm{Map}(-, -)$ 表示映射叠.

- 模叠中的点对应几何对象.
- 模叠中点的自同构群对应几何对象的自同构群.

目录

1 叠

2 叠上的层

3 半正交分解

4 应用

叠上的层

范畴化几何

- 通常几何中, 考虑几何对象 X 的**不变量**, 如各种**上同调**:
 - 凝聚层上同调、奇异上同调、de Rham 上同调、K 理论...
- 范畴化几何中, 考虑几何对象 X 的**范畴不变量**, 如各种**层范畴**:
 - 凝聚层、拟凝聚层、可构造层、 ℓ 进层、D-模...
- 由范畴不变量可以恢复出上同调不变量:
 - Grothendieck 群、Hochschild 上同调、Blanc K 理论...
- 而范畴不变量带有更多信息, 例如在 **Langlands 对应**等结构中.

叠上的层

非交换几何

范畴化几何是非交换几何常采用的观点.

- 通常几何中, 几何对象 X 上的函数相乘是交换的: $xy = yx$.
- 在非交换几何中, 则不然: $xy \neq yx$.
 - 描述现实世界的量子几何也如此.
- 例如, 非交换代数几何需要考虑形如 $\text{Spec}(A)$ 的几何对象, 其中 A 是非交换代数.
- 但并没有合适的方法将这些对象粘成非交换概形.

叠上的层

非交换几何

在范畴化几何的观点下:

- 将一般的 (可表现稳定 ∞ -) 范畴视为假想的非交换空间上的层范畴.
 - 此观点下, 层范畴足以囊括空间的全部信息.
- 例如, 非交换代数的表示范畴是这样的非交换空间, 作为非交换的仿射概形. (在此意义下, 表示论是非交换几何的特例.)
 - 特别地, Morita 等价的代数给出相同的非交换空间.
- 对范畴取不变量, 可以得出假想的非交换空间的上同调、K 理论等.

叠上的层

凝聚层

对叠 X , 考虑其凝聚层范畴 $D^b\mathrm{Coh}(X)$.

- 若 $X = Y/G$ 是商叠, 则

$$D^b\mathrm{Coh}(Y/G) \simeq D^b\mathrm{Coh}(Y)^G$$

是等变导出范畴, 即 Y 上带有 G -作用的凝聚层范畴.

- 特别地,

$$D^b\mathrm{Coh}(* / G) \simeq D^b\mathrm{Rep}(G)$$

是 G 的表示范畴.

叠上的层

凝聚层

- 若 G 是约化群, 则 G 的有限维表示都能分解成不可约表示的直和:

$$D^b\mathrm{Rep}(G) = \bigoplus_{\chi} \langle V_{\chi} \rangle,$$

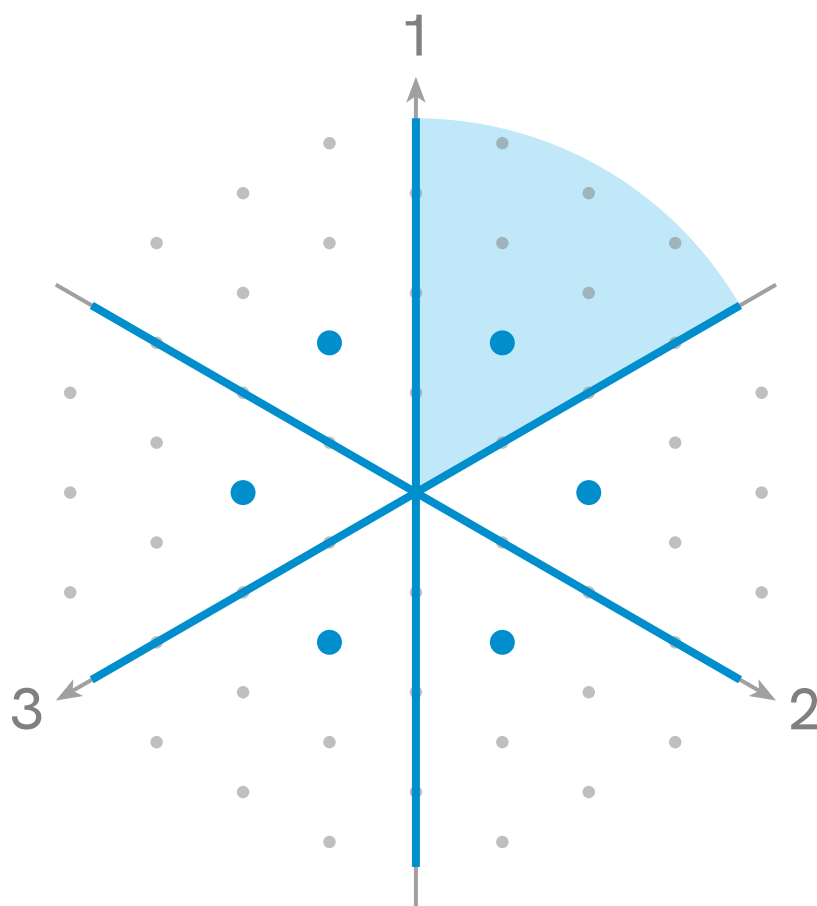
其中 χ 取遍支配整权, V_{χ} 是以 χ 为最高权的不可约表示, 而

$$\langle V_{\chi} \rangle = D^b\mathrm{Vect} \otimes V_{\chi} = \{ E \otimes V_{\chi} \mid E \in D^b\mathrm{Vect} \}$$

是 V_{χ} 生成的子范畴.

叠上的层

根系



例: $G = \mathrm{SL}_3$

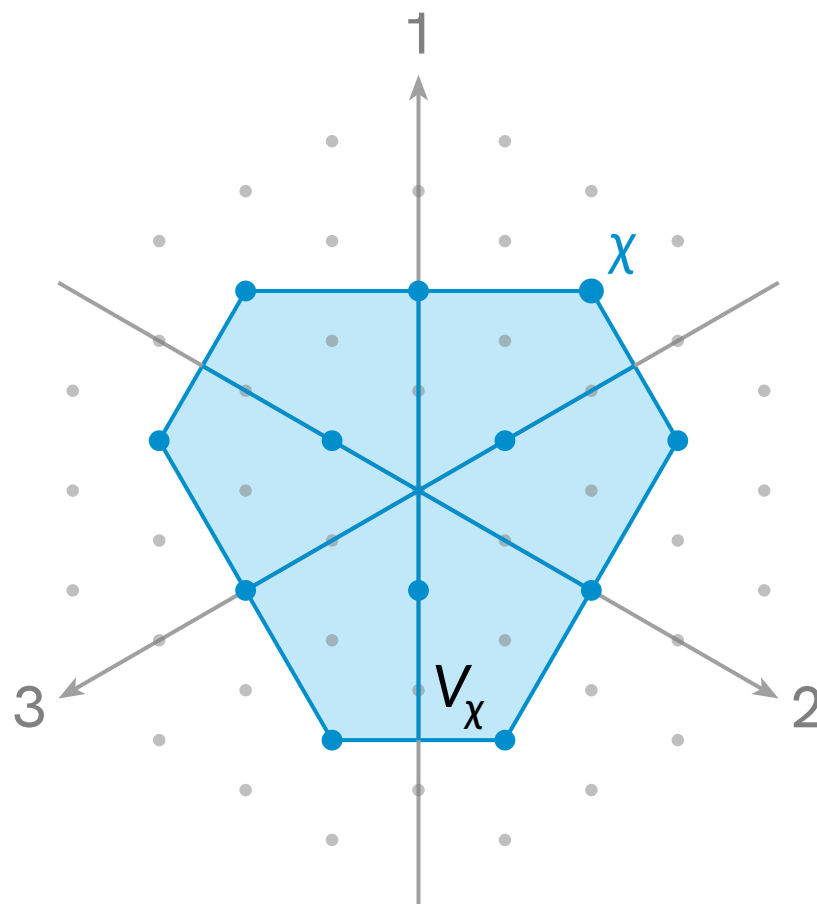
● 根

— 超平面

■ 支配权

叠上的层

最高权表示



叠上的层

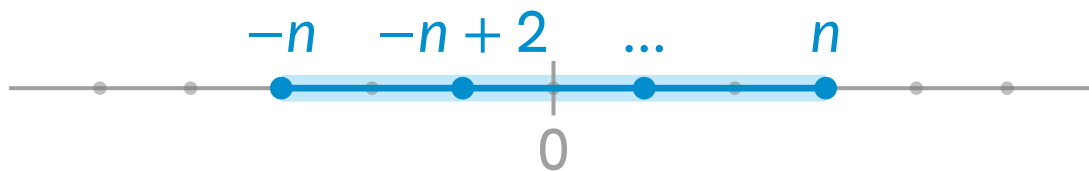
Borel-Weil-Bott 定理

考虑 $G = \mathrm{SL}_2$ 的旗簇 $G/B \simeq \mathbb{CP}^1$, 这里 B 是下三角阵的子群.

对 $n \geq 0$, 有

$$H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(n)) \simeq \langle x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n \rangle \simeq \mathbb{C}^{n+1},$$

这是 SL_2 的最高权表示 V_n :



所有 SL_2 -表示都是这些表示的直和.

叠上的层

Borel-Weil-Bott 定理

上述现象对一般约化群 G 也成立.

G 的最高权表示 V_χ 可由极大环面 $T \subset G$ 的一维表示 $\mathbb{C}_\chi$ 得到:

$$V_\chi = \star(\mathbb{C}_\chi),$$

其中 $\star: D^b\text{Rep}(T) \rightarrow D^b\text{Rep}(G)$ 是抛物诱导函子:

$$\star(\mathbb{C}_\chi) = H^\bullet(G/B, \mathbb{C}_\chi),$$

这里 $\mathbb{C}_\chi$ 诱导 G/B 上的线丛. 例如, $G = \text{SL}_2$ 时, 该线丛即 $\mathcal{O}(n)$.

目录

1 叠

2 叠上的层

3 半正交分解

4 应用

半正交分解

正交分解

三角范畴 $\mathcal{D}$ 的**正交分解**是指

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{D}_i,$$

其中 $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}$ 是**全子三角范畴**, 满足以下性质:

- 对任意 $x \in \mathcal{D}$, 存在唯一的**直和分解**

$$x = \bigoplus_{i \in I} x_i,$$

其中 $x_i \in \mathcal{D}_i$, 且只有有限个 x_i 非零.

半正交分解

半正交分解

三角范畴 $\mathcal{D}$ 的半正交分解是指

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_i \mid i \in \mathbb{Z} \rangle,$$

其中 $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}$ 是全子三角范畴, 满足以下性质:

- 对任意 $x \in \mathcal{D}$, 存在唯一的滤链

$$0 = \cdots \longrightarrow x_{i-1} \longrightarrow x_i \longrightarrow x_{i+1} \longrightarrow \cdots = x,$$

其中 $y_i = x_i/x_{i-1} \in \mathcal{D}_i$, 且只有有限个 y_i 非零.

半正交分解

Borel-Weil-Bott 定理有以下推广.

定理 (B-Pădurariu-Toda, 2026 预印本)

设 X 为 $\mathbb{C}$ 上的拟光滑导出代数叠, 满足某些条件. 则有半正交分解

$$D^b\mathrm{Coh}(X) = \langle \star_\lambda(W_\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{CL}(X) \otimes \mathbb{Q} \rangle,$$

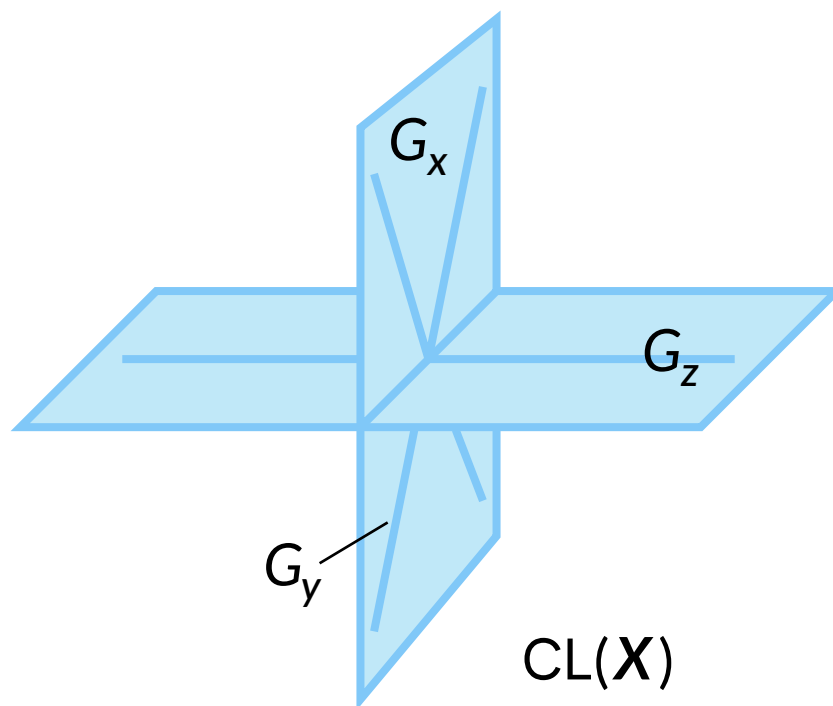
其中

- $W_\lambda \subset D^b\mathrm{Coh}(X_\lambda)$ 是窗口子范畴, 推广之前的 $\langle \mathcal{O}(n) \rangle$ 和 $\langle \mathbb{C}_x \rangle$.
- $\star_\lambda: D^b\mathrm{Coh}(X_\lambda) \rightarrow D^b\mathrm{Coh}(X)$ 是抛物诱导函子, 推广旗簇上同调.
- $\mathrm{CL}(X)$ 是 X 的组合晶格, 推广 Lie 群的根系.

半正交分解

组合晶格 (B-Halpern-Leistner-Ibáñez Núñez-Kinjo, 2025 预印本)

对每个点 $x \in X$, 考虑其自同构群 G_x 的根系, 粘起来得到 X 的根系.



目录

1 叠

2 叠上的层

3 半正交分解

4 应用

应用

几何 Langlands 对应

几何 Langlands 对应的三个整体版本:

- de Rham 版本 $\mathrm{Indcoh}_N(\mathrm{Conn}_G) \simeq \mathrm{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_{G^\vee}).$
- Betti 版本 $\mathrm{Indcoh}_N(\mathrm{Loc}_G) \simeq \mathrm{Shv}_N(\mathrm{Bun}_{G^\vee}).$
- Dolbeault 版本 $“\mathrm{Indcoh}”(Higgs_G) \simeq “\mathrm{Indcoh}”(Higgs_{G^\vee}).$

其中, Dolbeault 版本的具体表述仍未知, 但一个较弱猜想是

$$\mathrm{Indcoh}(Higgs_G^{\mathrm{ss}}) = \mathrm{IndL}(Higgs_{G^\vee}),$$

右边是 Pădurariu–Toda 构造的极限范畴, 是 D-模的一种退化.

应用

几何 Langlands 对应

我们给出所有版本中 Indcoh 一侧范畴的半正交分解.

- de Rham 和 Betti 版本的 Langlands 对应已证明:

$$\mathrm{Indcoh}_N(\mathrm{Conn}_G) \simeq \mathrm{D-mod}(\mathrm{Bun}_{G^\vee}),$$

$$\mathrm{Indcoh}_N(\mathrm{Loc}_G) \simeq \mathrm{Shv}_N(\mathrm{Bun}_{G^\vee}).$$

故这也给出右边范畴的半正交分解. 我们猜想, 这对应右边的 Harder–Narasimhan 分解.

- Dolbeault 版本的 Langlands 对应未证明, 但我们也有同样的猜想.
- 各种局部版本的 Langlands 对应也应有类似现象.

应用

量子群范畴化

- 量子群是假想的非交换空间, 带有群结构.
- 通常称为量子群的是上述几何对象上的函数环、上同调环等, 这些都是非交换的 Hopf 代数.
- 可以试着构造该几何对象上的层范畴 $\mathcal{D}$. 它应具有:

$$\text{乘法} \quad *: \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D},$$

$$\text{余乘法} \quad \Delta: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{D},$$

并满足高阶的相容性, 包括某种 Mackey 公式. 窗口子范畴似乎具有这些性质, 但完整的范畴化量子群需进行更多构造.

谢谢!