群、叠与组合

卜辰璟
University of Oxford

清华大学

2025 年 6 月 28 日

目录

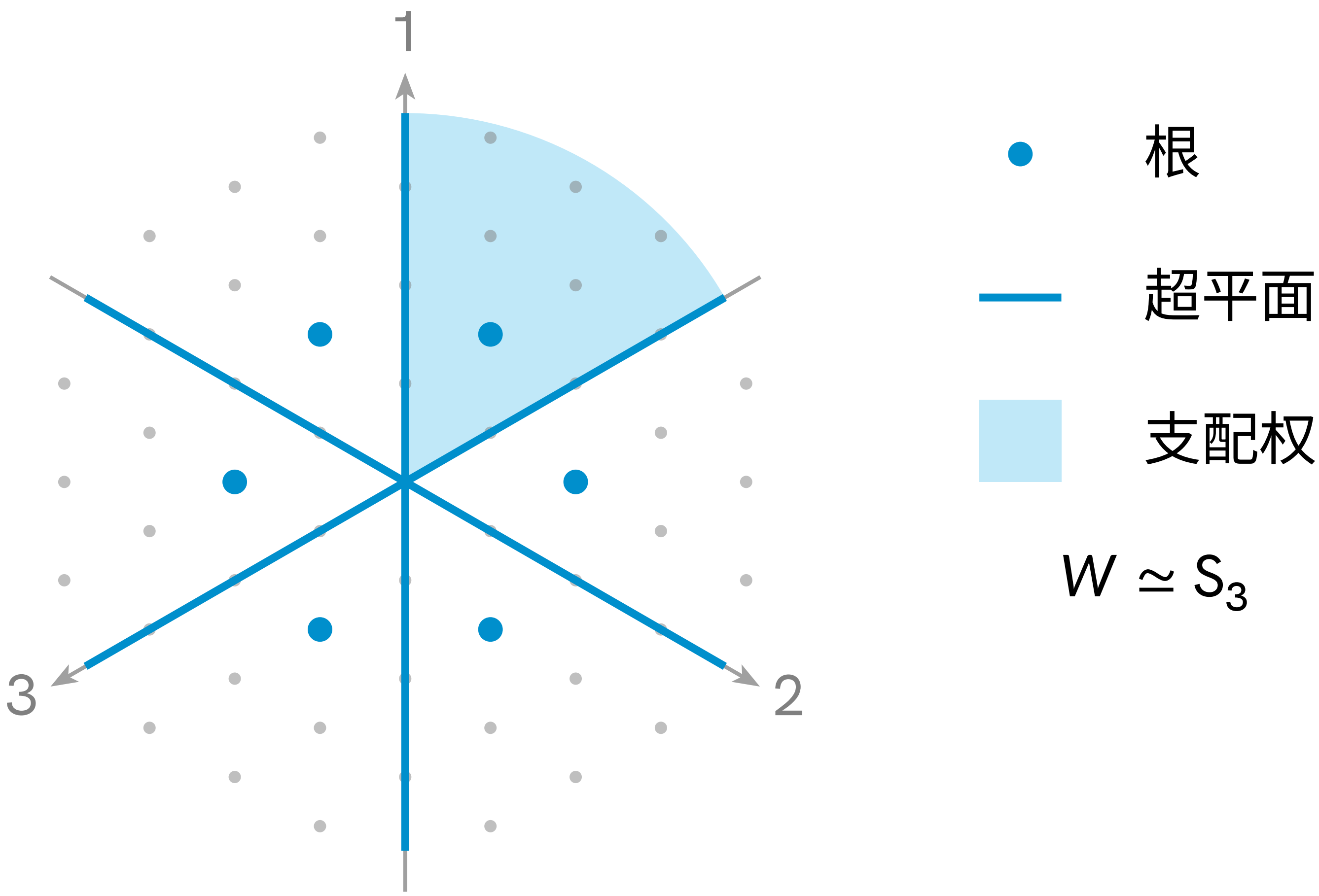
Lie 群

记号

- G 是复约化 Lie 群, 例如 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. 其 Lie 代数记为 $\mathfrak{g}$.
- $T \simeq (\mathbb{C}^\times)^n \subset G$ 是极大环面, 例如 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中的对角阵子群.
- $\Lambda^T = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}^n$ 是特征晶格.
  - 有一些根 $\Phi \subset \Lambda^T$, 即 T 作用于 $\mathfrak{g}$ 的权.
- $\Lambda_T = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, T) \simeq \mathbb{Z}^n$ 是余特征晶格.
  - 根对应 Λ_T 中的超平面, 形成超平面排布.
- W 是 Weyl 群, 作用于 Λ_T、Λ^T 上, 由关于根的反射生成.

Lie 群

- 例如 $G = \mathrm{SL}_3$, 此时 $\dim \Lambda^T = \dim \Lambda_T = 2$, 有 6 个根.



Lie 群

事实

- G 的表示皆为不可约表示之直和, 且

$$\{\text{不可约表示}\} \simeq \frac{\Lambda^T}{W},$$

每个支配权 $\chi \in \Lambda^T$ 对应于最高权表示 V_χ.

- 由陈–Weil 理论, 分类空间 BG 的上同调环是

$$\mathrm{H}^\bullet(BG;\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_t]^W \simeq \left\{ \text{多项式函数}\ \frac{\Lambda_T}{W} \to \mathbb{Q} \right\},$$

其中 $x_1,\dots,x_t$ 是 Λ_T 上的一组坐标.

Lie 群

事实

- G 的余特征的集合:

$$\frac{\{\,\lambda : \mathbb{C}^\times \to G\,\}}{\text{共轭}} \simeq \frac{\Lambda_T}{W}\,.$$

想法

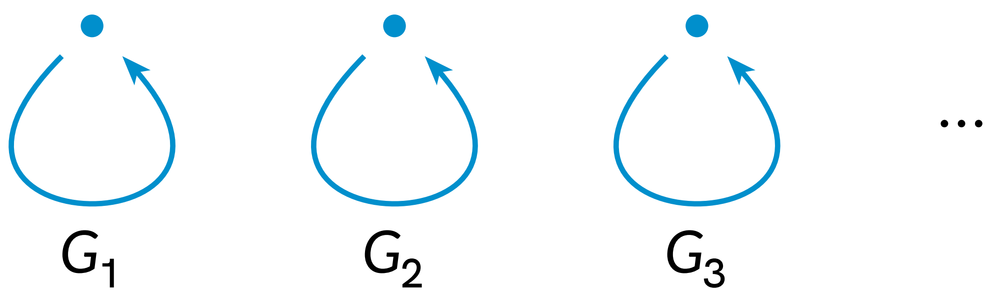
- 对群 G, 我们关心组合信息 Λ_T/W.
- 它是某种广义晶格.

目录

叠

群胚

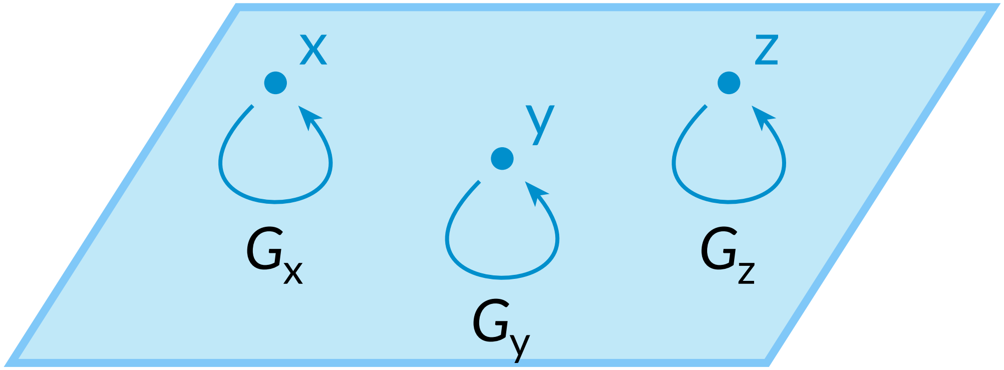
- 回忆, 群胚指所有态射可逆的范畴.
- 群胚就像集合, 但每个元素有一个自同构群:



叠

叠

- 叠可大致定义为 Lie 群胚, 即对象、态射之集均为复流形的群胚.
- 例如, 对 Lie 群 G, 有分类叠 $*/G$, 它只有一个点, 自同构群为 G.
- 叠就像复流形, 但每个元素有一个自同构群.



叠

商叠

- 若 Lie 群 G 作用于复流形 X, 则有商叠 X/G.
- 其对象集为 X, 态射集为 $G \times X$, 对 $(g, x) \in G \times X$ 有态射

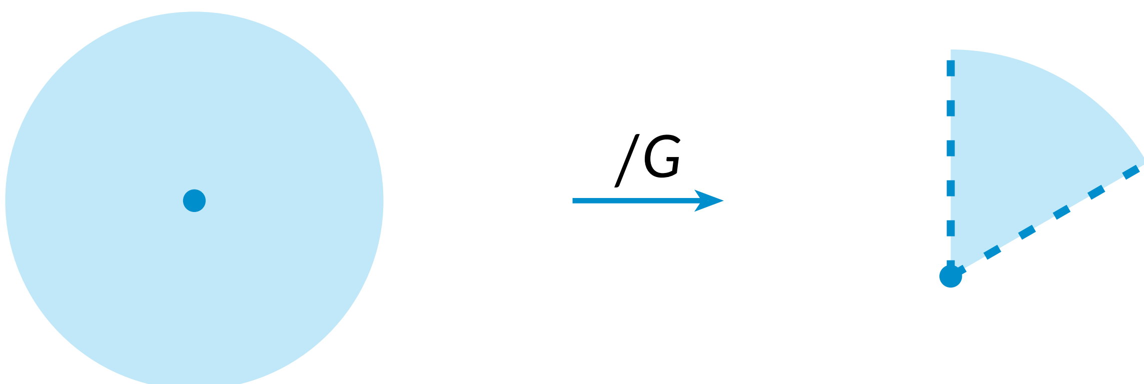
$$a_{g,x}\colon\quad x \xrightarrow{\sim} g \cdot x\,.$$

- 例如, $*/G$ 即为前述的分类叠.
- X/G 中对象的同构类对应于 X 中的 G-轨道.
- 点 $x \in X/G$ 的自同构群为稳定子 $\mathrm{Stab}_G(x) \subset G$.

叠

例子

让 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 以 $2\pi/n$ 的旋转作用于 $\mathbb{C}$. 则商叠 $\mathbb{C}/G$ 是圆心角 $2\pi/n$ 的扇形, 原点的自同构群为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 其它点的自同构群平凡.



注记

此例中, 虽然 $\mathbb{C}/G$ 有一个奇点, 但它在叠的意义下仍是光滑的.

叠

为何考虑叠?

- 几何学中, 范畴常常自带几何结构, 此即叠的结构. 例如:
  - (某复流形上) 向量丛的范畴 $\rightsquigarrow$ 向量丛的模叠.
  - 导出范畴 $\rightsquigarrow$ 导出叠, 其几何称为导出几何.

  模叠通常比相应的模空间具有更好的性质, 例如光滑性等.

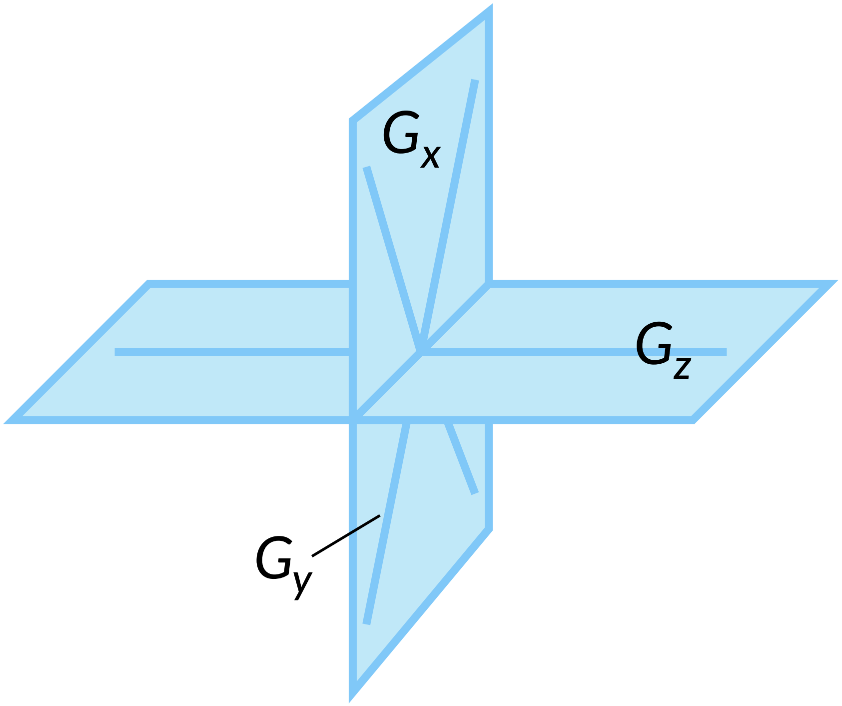
- 物理学中, 规范理论由叠 (而非空间) 描述最为自然, 正如向量丛构成范畴 (而非集合).
  - 我们需要导出几何来初步理解现实世界的物理.

目录

叠的晶格

想法

- 对叠 X, 定义其组合晶格 CL(X), 以推广 Lie 群的晶格 Λ_T/W.
- 对每个点 $x \in X$, 考虑其自同构群 G_x 的晶格 Λ_T/W, 再粘起来.



叠的晶格

定义 (B., Halpern-Leistner, Ibáñez Núñez, Kinjo, 2025 预印本)

对复代数叠 X, 定义其组合晶格

$$\mathrm{CL}(X) = \pi_0\Big(\mathrm{Map}(*/\mathbb{C}^\times, X) \Big),$$

其中

- π_0 指连通分支之集.
- $\mathrm{Map}(-,-)$ 指映射叠, 类似映射空间.

例如:

$$\mathrm{CL}(*/G) \simeq \frac{\{\text{余特征 } \mathbb{C}^\times \to G\}}{\text{共轭}} \simeq \boxed{\frac{\Lambda_T}{W}}.$$

叠的晶格

代数结构

组合晶格 CL(X) 总是具有形式晶格的结构.

- 形式晶格是指任何函子

$$L\colon \{\text{ 有限生成自由 } \mathbb{Z}\text{-模 }\}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \{\text{ 集合 }\}\,.$$

- 例如, 所有晶格 $\mathbb{Z}^n$ 都是形式晶格.
- 由这些 $\mathbb{Z}^n$ 出发, 可以取任意极限、余极限. 例如,

$$\mathbb{Z}^n \sqcup \mathbb{Z}^m\,, \qquad \mathbb{Z}^n \cup_{\{0\}} \mathbb{Z}^m\,, \qquad \mathbb{Z}^n/G$$

  都是形式晶格的例子, 这里群 G 线性作用于 $\mathbb{Z}^n$.

目录

应用

概述

- 推广已有的计数几何理论, 包括 Donaldson–Thomas 理论:

$$\text{凝聚层计数} \quad \rightsquigarrow \quad \text{任何叠 } X \text{ 上点的计数.}$$

- 研究叠的上同调、叠上各类层范畴的结构 (以下详述).

- 我们希望此体系有助于探究以下问题:
  - 几何 Langlands 纲领之若干版本, 例如三维流形的 Langlands 对偶.
  - 非交换 Hodge 理论中的若干问题, 例如一般约化群的 $P = W$ 猜想.
  - 数论中的 Langlands 纲领中或许也有类似的结构.

应用

叠的上同调

- 回忆, 对复约化 Lie 群 G, 有

$$H^\bullet(*/G;\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_t]^W \; ,$$

  其中 $x_1,\dots,x_t$ 是晶格 Λ_T 上的一组坐标.

- 对更一般的叠 X, 也可用组合晶格 $\mathrm{CL}(X)$ 描述上同调 $H^\bullet(X;\mathbb{Q})$.

应用

定理 (B., Davison, Ibáñez Núñez, Kinjo, Pădurariu, 2025 预印本)

设 X 为光滑复代数叠, 满足某些条件. 则有分解

$$H^\bullet(X;\mathbb{Q}) = \bigoplus_{\alpha:\mathbb{Z}^t\to\mathrm{CL}(X)} \Big(\mathrm{IH}^\bullet(X_\alpha;\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_t]\Big)^{\mathrm{Aut}(\alpha)},$$

其中

- 只对有限个 α 求和, X_α 大致是 α 对应的环面作用于 X 之固定集.
- $\mathrm{IH}^\bullet$ 是相交上同调, 是有限维的.

另外, 对辛叠的 Borel–Moore 同调、(−1)-移位辛叠的临界上同调, 也有类似的分解. 此时分解出来的部分称为 BPS 空间.

应用

叠的表示论

- 回忆, 复约化 Lie 群 G 的表示范畴 Rep(G) 有正交分解

$$\mathrm{Rep}(G) = \bigoplus_{\chi \in \Lambda^T/W} \langle V_\chi \rangle,$$

其中

  - V_χ 是以 χ 为最高权的表示.
  - $\langle V_\chi \rangle \subset \mathrm{Rep}(G)$ 是 V_χ 生成的 Abel 子范畴, 由形如 $V_\chi^{\oplus n}$ 的对象构成.

- 而 $\mathrm{Rep}(G) \simeq \mathrm{Coh}(*/G)$, 即叠 $*/G$ 上的凝聚层范畴.
- 对一般的叠 X, 将凝聚层范畴 $\mathrm{Coh}(X)$ 视为 X 的表示范畴.

应用

定理 (B., Pădurariu, Toda, 进行中)

设 X 为光滑复代数叠, 满足某些条件. 则有半正交分解

$$D^b\mathrm{Coh}(X) = \langle\, W_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{CL}(X) \otimes \mathbb{Q} \,\rangle\,,$$

其中

- $W_\lambda \subset D^b\mathrm{Coh}(X_\lambda)$ 是某个窗口子范畴.
- 需选择一个二次型以将 “余特征” λ 视为 “特征”.

另外, 我们期望对辛叠、(−1)-移位辛叠也有类似的分解.

谢谢！