顶点代数与同调

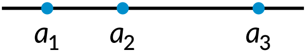
卜辰璟
University of Oxford

清华大学
2024 年 7 月 22 日

目录

顶点代数

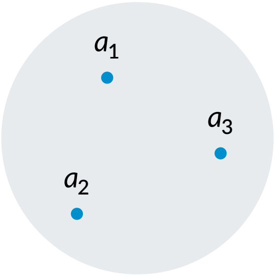
结合代数



$\Downarrow$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$$

顶点代数



$\Downarrow$

$$a_1(z_1) \cdot a_2(z_2) \cdot a_3(z_3)$$

顶点代数

定义

- 顶点代数是向量空间 V，带有乘法运算：对 $a_1, \dots, a_n \in V$，有
$$a_1(z_1) \cdots a_n(z_n) \in V [\![z_1, \dots, z_n]\!] [(z_i - z_j)^{-1}] \ ,$$
在 $z_i = z_j$ 处可能有奇点 $(i \neq j)$.
- 乘法满足单位律、结合律、交换律. 例如：
$$a(z) \cdot b(w) = b(w) \cdot a(z) \ ,$$
$$\big(a(z_1) \cdot b(z_2)\big)(w_1) \cdot c(w_2) = a(z_1 + w_1) \cdot b(z_2 + w_1) \cdot c(w_2) \ .$$

顶点代数

平移算子

- 顶点代数 V 带有平移作用 $\tau_z : \mathbb{C}[\![z]\!] \otimes V \to V$，即

$$\tau_z(a)(w) = a(z+w) \ .$$

- V 的平移算子 $T : V \to V$ 定义为

$$T(a) = \frac{d}{dz} \tau_z(a) \Big|_{z=0} \ .$$

反过来，也有 $\tau_z = \exp(zT)$.

顶点代数

例子

- 一大类顶点代数都形如自由多项式环

$$V \simeq \mathbb{C}[a_{i,0}, a_{i,1}, \dots : i \in I] \ ,$$

  乘法由 $|I|$ 个算子 $a_i(z) : V \to V(\!(z)\!)$ 决定. 这称为重构定理.

- 此时, 平移算子 T 大致是由 $T(a_{i,j}) = a_{i,j+1}$ 确定的导子.

代数对象

- 顶点代数可以表达为某个范畴 VS 中的交换代数对象, 其对象是带有 n 维平移作用的向量空间.

目录

H 空间的同调

H 空间

- H 空间是带点拓扑空间 (X, e)，带有乘法运算
$$m\colon X \times X \longrightarrow X\ ,$$
满足同伦意义下的单位律，e 为单位元.
- $+$ 结合律 $\Rightarrow$ 结合 H 空间.
- $+$ 结合律、交换律 $\Rightarrow$ 交换 H 空间.
- 后两者即同伦拓扑空间范畴 hTop 中的（交换）代数对象.

H 空间的同调

例子

- 拓扑群,例如 Lie 群,都是结合 H 空间.
- 复向量丛的分类空间

  $$X = \coprod_{n \geq 0} \mathrm{BU}(n)$$

  是交换 H 空间,其乘法运算是

  $$\oplus \colon \mathrm{BU}(m) \times \mathrm{BU}(n) \to \mathrm{BU}(m+n) \ .$$

- 类似地,$\mathrm{BU} = \operatorname*{colim}_{n \to \infty} \mathrm{BU}(n)$ 是交换 H 空间.

H 空间的同调

Milnor–Moore 定理

- 若 X 是道路连通结合 H 空间，则其上同调是自由多项式环：

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^\bullet(X;\mathbb{Q}) &\simeq \mathrm{Sym}\big(\pi_\bullet(X)\otimes\mathbb{Q}\big)^\vee \\ &\simeq \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots] \,, \end{aligned}$$

  其中 $(e_1, e_2, \dots)$ 是同伦群 $\pi_\bullet(X)\otimes\mathbb{Q}$ 的一组对偶基，乘法满足分次交换律：

$$e_i \cdot e_j = (-1)^{(\deg e_i)(\deg e_j)}\, e_j \cdot e_i \,.$$

H 空间的同调

例子

- 令 $X = S^1$,则

  $$\mathrm{H}^\bullet(S^1;\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[x]\,,$$

  其中 $\deg x = 1$,从而自动有 $x^2 = 0$.

- 令 $X = \mathrm{BU} = \operatorname*{colim}_{n\to\infty} \mathrm{BU}(n)$,则

  $$\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{BU};\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[c_1, c_2, \ldots]\,,$$

  其中 c_i 是第 i 陈类,次数 $2i$.

目录

同调顶点代数

构造

设有以下信息：

- 交换 H 空间 X，运算记为 $\oplus\colon X\times X\to X$.
- $\mathrm{BU}(1)$-作用 $\odot\colon \mathrm{BU}(1)\times X\to X$.
- K 理论类 $\Theta\in\mathrm{K}(X)$.

并满足某些相容条件.

同调顶点代数

例如,常取:

- X 为 $\mathbb{C}$ 上某加性范畴之模空间. 例如,可取某空间 Y 上向量丛之模空间

$$X = \coprod_{n\geq 0} [Y, \mathrm{BU}(n)] \ ,$$

或 Y 上链复形之模空间,即 Y 的 K 理论

$$X = \mathrm{K}(Y) = [Y, \mathrm{BU} \times \mathbb{Z}] \ .$$

- $\mathrm{BU}(1)$-作用 $\odot$ 为加性范畴中的标量乘法.
- Θ 为 X 的切复形 $\mathbb{T}_X$ 之类,由形变理论决定.

同调顶点代数

此时,X 的同调 $V = \mathrm{H}_\bullet(X;\mathbb{C})$ 带有顶点代数结构:

- 其乘法大致为

$$a(z)\,b(w) \sim \oplus_*\left[(a \boxtimes b) \cap \prod_{\lambda\in\mathbb{Z}^2\setminus 0} c_{1/(\lambda_1 z+\lambda_2 w)}(\Theta_\lambda)\right],$$

  其中方括号内是 $X \times X$ 的同调类,c 是某个陈类级数,Θ_λ 表示 $\oplus^*(\Theta)$ 中 $\mathrm{U}(1)^2$-权为 λ 的部分.

- 其平移算子由 $\mathrm{BU}(1)$-作用给出:$\mathrm{H}_\bullet(\mathrm{BU}(1);\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[z]$.

特别地,之前讨论的模空间同调都自然地是顶点代数.

同调顶点代数

注记

- 若令 $\Theta = 0$,则此顶点代数为通常的交换代数,常视为平凡.
- 此顶点代数的乘法关于 $1/(\lambda_1 z + \lambda_2 w)$ 有极点,而非仅关于 $z - w$. 因此还需假设 $\lambda \neq (m, -m)$ 时 $\Theta_\lambda = 0$,才能得到顶点代数,否则得到广义顶点代数.

同调顶点代数

例

- 设 Y 为紧 Kähler 流形.
- 设 $X = [Y, BU \times \mathbb{Z}]$ 为 Y 的 K 理论,即 Y 上链复形模空间.
- 设 $X_0 \subset X$ 为 0 所在的分支. 事实上,由于群结构,X 的其它分支都同构于此分支.
- Milnor–Moore 定理说明 X_0 的同调是自由多项式环,由同伦群生成.

同调顶点代数

例

- 直接跳到计算结果. 选一组基 $e_{i,j} \in \mathrm{H}_i(Y;\mathbb{C})$,记

$$S_{i,j,k} = \mathrm{ch}_k(U) \,/\, e_{i,j} \quad \in \mathrm{H}^{2k-i}(X;\mathbb{C}) \ ,$$

  其中 U 是 $Y \times X$ 上的自言复形,在每片 $Y \times \{x\}$ 上给出 x 代表的链复形;运算 $/$ 是代数拓扑中的除积.

- 则 $\mathrm{H}^\bullet(X;\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[S_{i,j,k}]$ 是无穷元多项式环.

- 从而也有 $\mathrm{H}_\bullet(X;\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[s_{i,j,k}]$,它具有顶点代数结构.

目录

同调 Lie 代数

构造

- 对顶点代数 V,有 Lie 代数

$$\bar{V} = V / \operatorname{im} T \ ,$$

其中 T 是平移算子,Lie 括号为

$$[a, b] = \operatorname{res}_{z=w} a(z) \cdot b(w) \ .$$

- 此 Lie 括号良定义的大致原因是

$$\operatorname{res}_{z=w} \circ \frac{\partial}{\partial z} f(z, w) = 0 \ ,$$

而 Jacobi 恒等式来自留数定理.

同调 Lie 代数

例

- 回忆之前的例子 $V = \mathrm{H}_\bullet(X;\mathbb{C})$. 此例中
$$\bar{V} = \mathrm{H}_\bullet(\bar{X};\mathbb{C}) ,$$
其中 $\bar{X} = X/\mathrm{BU}(1)$.
- $\bar{X}$ 是更经典意义的模空间:原来范畴的对象 x 并非对应 X 中一点,而是对应一个子空间 $\mathrm{B}\,\mathrm{Aut}(x)$,而 $\bar{X}$ 消除了 $\mathrm{Aut}(x)$ 中的标量乘法.
- 代数几何、物理中关心的模空间基本类就定义在 $\bar{X}$ 上.

目录

Riemann 面上向量丛计数

设定

- 设 C 为紧 Riemann 面.
- 设 $X = \mathrm{K}(C) = [C, \mathrm{BU} \times \mathbb{Z}]$.
  - $V = \mathrm{H}_\bullet(X; \mathbb{C})$ 为顶点代数,$\bar{V} = \mathrm{H}_\bullet(\bar{X}; \mathbb{C})$ 为 Lie 代数.
- 设 $M_{r,d} \subset \bar{X}$ 为 C 上秩 r、次数 d 稳定向量丛的模空间.
  - 次数指第一陈类,可取任何整数.
  - 稳定向量丛仅有标量自同构,在 $\bar{X}$ 中仅剩平凡自同构.
  - $M_{r,d}$ 是连通 Kähler 流形,当 r, d 互素时它紧,从而有基本类.

Riemann 面上向量丛计数

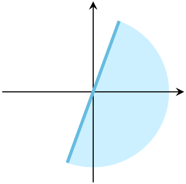
正规化求和

- 定义
$$1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}\ .$$
- 更一般地，对非负整数 k，定义
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^k=\zeta(-k)\ .$$
- 高维扇形格点上的多项式函数也可求和。（严格陈述需要更多信息。）

Riemann 面上向量丛计数

正规化求和

- 性质:半平面上的求和总为 0:

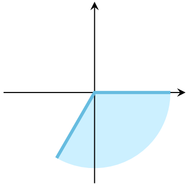
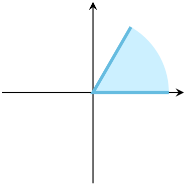
$\sum$  $= 0.$

- 原因:
  - k 为奇数时,$n^k + (-n)^k = 0$.
  - k 为偶数时,$\zeta(-k) = 0$.

Riemann 面上向量丛计数

正规化求和

- 由此得到一些关系：

$\sum$  $= -\sum$ 

因此，正规化求和与锥、超平面排布等组合对象联系密切.

Riemann 面上向量丛计数

定理 (B., 2023)

- 当 r 与 d 互素时，$M_{r,d}$ 的基本类为

$$[M_{r,d}]_{\text{基}} = \sum_{\substack{d = d_1 + \cdots + d_r \quad (d_i \in \mathbb{Z}) \\ \frac{d_1 + \cdots + d_i}{i} \leq \frac{d}{r},\ i = 1, \ldots, r-1}} \frac{1}{m+1} \cdot \Big[\Big[\cdots\Big[[M_{1,d_1}]_{\text{基}},\ [M_{1,d_2}]_{\text{基}}\Big],\ \ldots\Big],\ [M_{1,d_r}]_{\text{基}}\Big],$$

其中 m 是求和条件中取等个数，并使用 $\bar{V}$ 的 Lie 代数结构.

- 这里 M_{1,d_i} 即线丛模空间，也即 Jacobi 簇，同胚于 $(S^1)^{2g}$.

Riemann 面上向量丛计数

注记

- 该结论称为计数,因为给定基本类,即可计算其与上同调类的相交数,即对满足某条件的向量丛计数.
- 该基本类前人已计算过(Witten 1992,Jeffrey–Kirwan 1998),但上述无穷求和公式是新的,其几何意义仍待解释.
- 当 r, d 不互素时,若 C 亏格 ≥ 2,则仍有办法定义 $M_{r,d}$ 的基本类,应该由该公式给出.
- 为定义该正规化求和,需要用到顶点代数结构(而不止是 Lie 代数结构)来提供额外信息.

Riemann 面上向量丛计数

展开式

$$[M_{r,d}]_{\text{基}} = \operatorname{res}_{z_{r-1}} \circ \cdots \circ \operatorname{res}_{z_1} \Bigg\{ \frac{(-1)^{(g-1)r(r-1)/2+(r-1)(d-1)}}{r \cdot \prod\limits_{0\le i<j\le r-1} (z_i - z_j)^{2g-2}} \cdot$$

$$\sum_{\substack{0 \le m \le \gcd(r,d)-1 \\ 1 \le i_1 < \cdots < i_m \le r-1 \\ \forall k,\ i_k d/r \in \mathbb{Z}}} \frac{(-1)^m}{m+1} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{\substack{1 \le i \le r-1 \\ \forall k,\ i \ne i_k}} \left[1 - \exp\left(\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}_i^\ell - \tilde{z}_{i-1}^\ell}{\ell!} s_{2,1,\ell+1} \right) \right]} \cdot$$

$$\prod_{i=0}^{r-1} \left[\exp\left(\tilde{z}_i \left(s_{0,1,1} + \left(\left\lfloor \frac{(i+1)d}{r} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{id}{r} \right\rfloor \right) s_{2,1,2} + \sum_{j,k,\ell} s_{j,k,\ell+1} \frac{\partial}{\partial s_{j,k,\ell}} \right) \right) \cdot \right.$$

$$\left. \left. \prod_{j=1}^{g} (s_{1,j,1} s_{1,j+g,1} - s_{2,1,2}) \right] \Bigg\} \right|_{z_0=0}$$

其中 $\tilde{z}_i = z_i - (z_0 + \cdots + z_{r-1})/r$.

Riemann 面上向量丛计数

未来方向

- 找出该顶点代数的物理意义.
- 找出上述发散求和公式的几何或物理意义.
- 将该理论推广到更一般的模空间,乃至一般的空间.

谢谢！